احتمالات :

مقدمه :

چنانچه قبلاً بیان گردید، در یک بررسی آماری از جمعیت مورد نظر، نمونه ای انتخاب و سپس با استفاده از روشهای آمار توصیفی به بررسی مشخصات اصلی نمونه می پردازیم. هدف اصلی در این بررسی آماری، تجزیه و تحلیل اطلاعات حاصل از نمونه منتظر به دست آوردن نتایجی و انجام استنباط هایی در مورد جمعیت مورد مطالعه است. چون نمونه شامل قسمتی از اطلاعات موجود در جمعیت است پس نمی توان با یقین کامل نتایج به دست آمده از روی آن را به طور قطع اطمینان داد. بنابراین نیاز به روشهایی داریم که میزان درستی نتایج حاصل را بتوان با دقت معینی بر حسب نظریه احتمال بیان نمود.

در ابتدا لازم است برخی از مفاهیم و تعاریف بیان گردند:

- آزمایش: به مجموعه عملیات صحیحی که انجام می شود و برای ما قابل پیش بینی است و نتیجه مشخصی روی افرادی حاصل می دهد.

- آزمایش تصادفی: به آزمایشی گفته می شود که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش با قطعیت نتوان پیش بینی کرد. بنابراین نتایج احتمال رخداد پیش بینی منطقی همه نتایج ممکن آن و تعیین سهم نتایج مطلوب به همه نتایج ممکن آن، نتایج متفاوتی دارند.

آزمایش تصادفی اغلب با هم تفاوت دارند. هریک از آزمایشهای ذیل نیز آزمایش تصادفی است:

- پرتاب یک سکه
- پرتاب یک تاس
- اندازه گیری بارندگی روزانه در یک فصل خاص
- انتخاب یک عدد تصادفی ساده از جدول اعداد تصادفی

در تمامی این آزمایشها، نتیجه آزمایش قبل از انجام قابل پیش بینی نیست.

فضای نمونه: عبارتست از تمای پیشامدهای ممکن و متمایز (تمام نتایج ممکن) یک آزمایش تصادفی. معمولاً با حرف S نشان می‌دهند. هر یک از اعضای فضای نمونه را یک نقطه نمونه، برآمد یا عضر فضای نمونه‌ای نامند.

فضای نمونه پرتاب یک سکه: $S=\{\overset{H}{\text{شیر}}, \overset{T}{\text{خط}}\}$

فضای نمونه پرتاب دو تاس: $S=\{(x,y)\mid x,y=1,2,\dots,6\}$

فضای نمونه پرتاب یک تاس: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$

اگر فضای نمونه ۲ شامل متناهی (پرتاب یک سکه، پرتاب دو سکه، پرتاب یک تاس و ...) و نامتناهی شمارش‌پذیر باشد

آنرا فضای نمونه گسسته (شمارش‌پذیر) گویند. (از بیان یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا شیر ظاهر شود.)

$S=\{1,2,3,4,5,\dots\}$

اگر فضای نمونه شامل مجموعه‌ای از اعداد باشد که حاوی هیچ بازه‌ای نباشد آنرا فضای نمونه پیوسته می‌نامند. لازم به ذکر است که هر بازه در بی‌نهایت عدد دارد پس فضای نمونه پیوسته نامتناهی است. بنابراین در تعریف فوق می‌توان گفت فضای نمونه پیوسته شامل تعداد نامتناهی از نقاط (یک یا چند بازه) بصورت پیوسته قرار گیرد. بعنوان مثال اگر حداقل و حداکثر

وزن مخصوص تخم‌مرغ‌های یک کارتن ۲٫۶ و ۵٫۳ گرم باشد. فضای نمونه پیوسته بصورت زیر نوشته می‌شود:

فضای نمونه پرتاب آجاس با هم:

$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(5,6),\dots,(6,5),(6,6)\}$ $\quad S=\{\rho\mid 2{,}6\le\rho\le 5{,}3\}$

پیشامد (event): هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک پیشامد گوییم. اعلب با حروف بزرگ انگلیسی نشان داده می‌شود.

مثال:
- پیشامد اینکه شماره تاس کمتر از ۴ باشد: $A=\{1,2,3\}$
- پیشامد اینکه شماره تاس عددی فرد باشد: $B=\{1,3,5\}$
- پیشامد اینکه شماره تاس عددی زوج باشد: $C=\{2,4,6\}$

مثال: میزان تولید محصول در ساعت (برحسب تن) $S=\{x\mid 0<x<40\}$

پیشامد اینکه در ساعت تولید کمتر از ۱۴ تن و بیشتر از ۸ تن داده باشد:

$A=\{x\mid 0<x<15\}$

$B=\{x\mid 2x<20\}$

- پیشامد ساده و مرکب :

پیشامدی را ساده گوییم که فقط دارای یک عضو (یک نقطه یا برآمد) از فضای نمونه باشد. اگر پیشامدی بیش از یک عضو

از فضای نمونه را دارا باشد آن پیشامد را مرکب گوییم. بعبارتی، پیشامد مرکب مجموعه‌ای از دو یا چند برآمد با خصوصیت

مورد نظر مشترکی دارند. پیشامد مرکب بدون شمارش نیز با شمارش قابل تجزیه به دو یا چند پیشامد ساده است.

- پیشامد متمم :

$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 4\} \Rightarrow A^c = \{2, 3\}$

$A^c = \bar{A} = A'$

متمم پیشامد A را با A^c نشان می‌دهند. پیشامد A^c شامل تمام برآمدهای که در پیشامد A نیستند. دو عبارت زیر

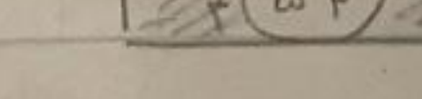
دو پیشامد A و $\bar{A}$ (غیر A) را متمم گوییم که در وقوع یکی با عدم وقوع دیگری همراه باشد.

- پیشامدهای جدا از هم (ناسازگار) :

دو پیشامد A و B را در صورتی ناسازگار یا جدا از هم گوییم که هیچ نقطه نمونه (برآمد) مشترکی با هم نداشته باشند. بعبارت دیگر

اشتراک آنها تهی باشد. پیشامدهای ناسازگار مثل پیشامدهای متمم نمی‌توانند همزمان رخ دهند. مثل آمدن همزمان اعداد زوج و

فرد در پرتاب یک بار تاس یا آمدن شیر و خط با هم در پرتاب یک بار ته یا سکه



دو پیشامد جدا از هم یا ناسازگار

مثال پیشامد متمم :

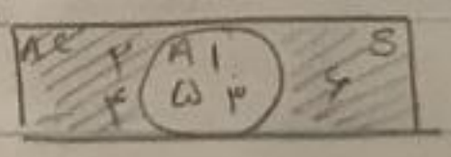
$S = \{x \mid 0 < x < 3\}$

$A = \{x \mid 1 < x < 2\} \Rightarrow A^c = \{x \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{x \mid 2 \leq x < 3\}$

با استفاده از نمودار ون :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$



$A^c = \{2, 4, 6\}$

مثال: اگر پرتاب هفت تاس را یکبار پرتاب کنیم فضای نمونه عبارتست از:

$S = \{(1,1), \dots, (2,2), \dots, (3,3), \dots, (6,6), \dots, (5,5), \dots, (6,6)\}$ یا $S = \{x,y \mid x,y = 1,2,\dots,6\}$

اگر پیشامد A این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس کمتر از ۳ باشد در این صورت A یک پیشامد ساده است.

$A = \{1,1\}$

اگر پیشامد B این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس بیشتر از ۱۰ باشد B یک پیشامد مرکب است.

$B = \{(5,7), (6,5), (6,6)\}$

اگر پیشامد C این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداقل ۱۳ باشد در این صورت C یک پیشامد محال یعنی است.

$C = \{\}$ یا $C = \emptyset$

اگر پیشامد D این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۱۲ باشد در این صورت D یک پیشامد حتمی بوده و آن برابر با فضای نمونه‌ای باشد.

$D = S$

- اجتماع دو پیشامد: $A \cup B$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

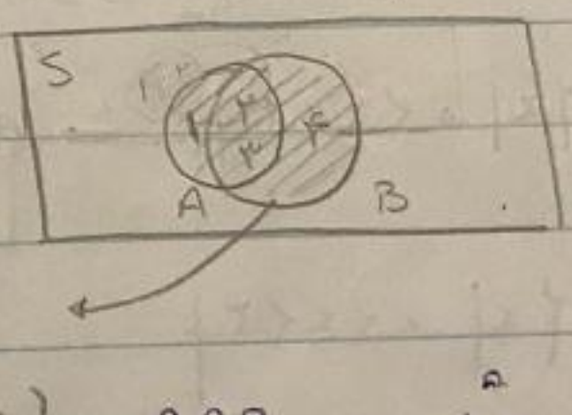
مجموعه تمام برآمدهای اگر یا در پیشامد A یا در پیشامد B اگر به طور مشترک در هر دو پیشامد تعلق دارد.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,3,4\}$

$\longrightarrow A \cup B = \{1,2,3,4\}$



- اشتراک دو پیشامد: $A \cap B$

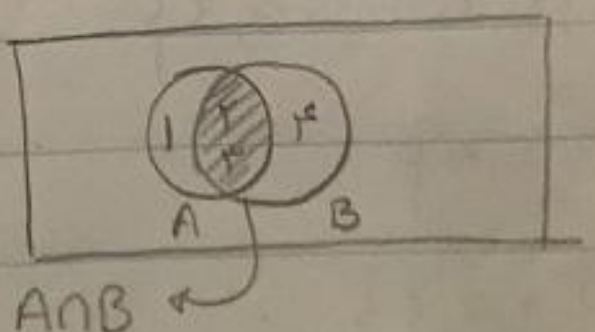
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

مجموعه تمام برآمدهایی که هم در پیشامد A و هم در پیشامد B به طور مشترک تعلق دارند

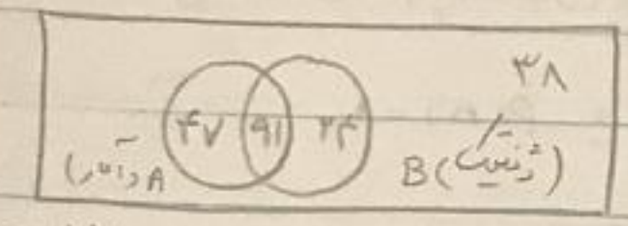
$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,3,4\}$

$\longrightarrow A \cap B = \{2,3\}$



مثال: از بین ۲۰۰ نفری دانشجویان دوره‌ی یک سال تحصیلی در یک دانشگاه ۱۳۸ نفر در درس آمار، ۱۱۵ نفر در درس ژنتیک و ۹۱ نفر در هر دو درس ثبت نام کرده‌اند. چند نفر از این دانشجویان در هیچ کدام از این دو درس ثبت نام نکرده‌اند (سنوفیلاردن)



$n(A \cap B) = 91$

$n(A) = 47$

$n(B) = 24$

$n(A \cup B) = 47 + 91 + 24 = 162$

$n[(A \cup B)^c] = 200 - 162 = 38$

۳۸ دانشجویی که هیچ درسی را انتخاب نکرده‌اند.

مثال: اگر $S = \{x \mid 0 < x < 10\}$ ، $M = \{x \mid 2 < x < 8\}$ ، $N = \{x \mid 5 < x < 10\}$ باشد

پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) $M \cup N$ ب) $M \cap N$ ج) $M \cap N^c$ د) $M^c \cup N$

الف) $M \cup N = \{x \mid 2 < x < 10\}$

ب) $M \cap N = \{x \mid 5 < x < 8\}$

ج) $N^c = \{x \mid 0 < x \leq 5\}$

$M \cap N^c = \{x \mid 2 < x \leq 5\}$

د) $M^c = \{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ یا } 8 \leq x < 10\}$

$M^c \cup N = \{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ یا } 5 < x < 10\}$

احتمال

احتمال پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهند و عبارتست از نسبت تعداد حالتی که پیشامد A رخ می‌دهد و قابل آزمایش تحت شرایط یکسان تکرار می‌شود.

$$P_e(A) = \frac{\text{تعداد حالتی که } A \text{ رخ داده است}}{\text{تعداد حالات آزمایش}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال وقوع یک پیشامد عددی بین صفر و یک است.

احتمال وقوع پیشامد (هنگامی که) $\rightarrow$ $0 \leq P(A) \leq 1$ $\leftarrow$ احتمال وقوع پیشامد (صفر) هنگامی

می دهد، تمامی عناصر پیشامد اتفاق می افتد

اتفاق می افتد حتی از عناصر پیشامد اتفاق نمی افتد

$A=S$ یا $P(A)=1$ $\qquad$ $A=\Phi$ یا $P(A)=0$

مثال: سکه‌ای ۵۰۰ بار پرتاب کرده و ۲۰۰ بار خط ظاهر گردیده است. حال اگر این شخص سکه را بار دیگر پرتاب نماید با چه احتمالی

شیر می آید

$P(A) = \frac{300}{500} = 0.6 \times 100 = \%60$ $\qquad$ لم شیر آمدن

مثال: در ظرفی ۸ مهره سفید، 4 مهره قرمز و 6 مهره آبی وجود دارد. در صورت انتخاب یک مهره، با چه احتمالی این مهره قرمزی باشد

$Pr(R) = \frac{4}{18} = 2/9$

مثال: از ۲۰۰ تخته تولیدی در یک کارخانه تخته چوب، ۴۵ تخته دارای ناصافی سطح و ۳۷ تخته دارای تقبع

بر خی چسب بوده اند: در صورتی که یکی از تخته ها به تصادف برداریم با چه احتمالی ناصافی سطح و یا تقبع بر خی

چسب دارند.

$P(A) = \frac{45}{200} = 0.225 \times 100 = \%22,5$ $\qquad$ لم ناصافی سطح

$P(B) = \frac{37}{200} = 0.185 \times 100 = \%18,5$ $\qquad$ لم تقبع بر خی چسب

باید دانست، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با: $P(A) \cdot fr(A)$ $\leftarrow$ فراوانی نسبی وقوع پیشامد A:

محاسبه احتمال یک پیشامد با استفاده از جدول احتمال کلیه حالات:

اگر فضای نمونه شامل K پیشامد $e_1, e_2, \dots, e_K$ باشد، بطوری که شانس رخ دهد در این حالات یکسان باشد

$S = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_K\}$

مدل احتمال کلیه حالات آن است وهر پیشامد با شانس $\frac{1}{K}$ رخ می دهد.

مثال: آزمایش پرتاب سکه:

$S = \{\text{شیر}\ H, \text{خط}\ T\}$ $\qquad$ $P(\text{شیر}) = P(\text{خط}) = 1/2$

مثال: آزمایش پرتاب تاس:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=1/6$

اگر پیشامد A شامل m برآمد از K برآمد فضای نمونه باشد در این صورت احتمال A برابر است با $\frac{m}{K}$

$$P(A)=\frac{m}{K}$$

مثال: در پرتاب یک تاس مطلوب، احتمال وقوع پیشامد آنکه عدد بزرگتر از ۴ اتفاق بیافتد:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $A=\{5,6\}$ $\Rightarrow m=2$

$\hookrightarrow K=6$ $\Rightarrow P(A)=2/6=1/3$

مثال: آزمایش پرتاب سکه برای دو بار متوالی:

$S=\{HH,HT,TH,TT\}$

پیشامد A بار اول شیر آید $A=\{HH,HT\}$ $P(A)=2/4=1/2$

پیشامد B پشت بیاید $B=\{HH,TT\}$ $P(B)=2/4=1/2$

آزمایش پرتاب دو تاس بطور همزمان (پرتاب یک تاس برای دو بار متوالی)

$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\dots,(6,6)\}$

پیشامد A مجموع شماره‌ی دو تاس برابر ۷ باشد

$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$

$m=6$

$K=36$ $\Rightarrow P(A)=6/36=1/6$

پیشامد B تهیه پرتاب‌ها دو بار متوالی یکسان باشد

$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$m=6$

$K=36$ $\Rightarrow P(B)=6/36=1/6$

● مثال احتمال وقوع کدام بیشتر است:

در نمونه ای وسیع از جمعیت ایران گرفته شده آمار، تعداد فرزندان هر خانواده با نسبت افرادی که دارای این تعداد فرزند هستند نشان داده شده است. اطلاعات مربوط به این سرشماری به این شرح است:

تعداد فرزندان	0	1	2	3	4	5 و بیشتر
نسبت خانوارها	0.05	0.1	0.35	0.25	0.15	0.1

اگر خانواده ای بطور تصادفی انتخاب شود. مطلوبست احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ذیل:

● الف) کمتر از 2 فرزند داشته باشد:

$$P(A) = 0.1 + 0.05 = 0.15$$

ب) این 2 تا 4 فرزند داشته باشد:

$$P(B) = 0.35 + 0.25 + 0.15 = 0.75$$

ج) احتمال داشتن چهار فرزند یا بیشتر

$$P(C) = 0.15 + 0.1 = 0.25$$

نکته مهم این است که احتمال وقوع پیشامد A با فراوانی نسبی وقوع پیشامد A همیشه برابر است با:

$$P(A) = f_r(A)$$

$$\text{فراوانی نسبی وقوع پیشامد } A = \frac{\text{تعداد دفعات وقوع پیشامد } A \text{ در } N \text{ آزمایش}}{N}$$

قوانین احتمالات

1- قانون فاکتوریل:

حاصل ضرب n عدد متوالی را فاکتوریل گوییم و با $n!$ نشان می دهیم:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

STAEDTLER®

۲ـ قاعده ضرب :

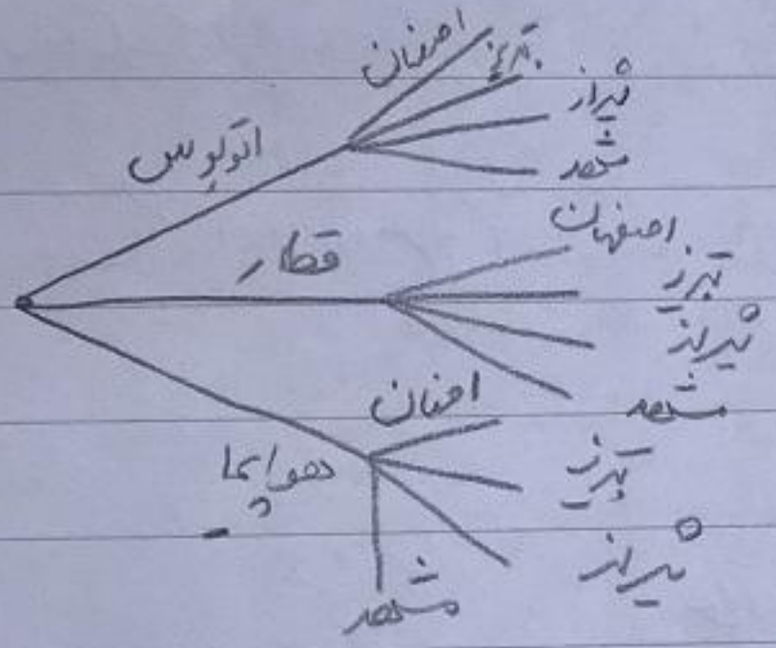
اگر عملی مشتمل ۲ مرحله باشد که مرحله اول به n_1 طریق، مرحله دوم به n_2 طریق و ... و مرحله kام به n_k طریق انجام گیرد، آنگاه عمل مزبور به $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ طریق ممکن انجام می‌شود :

$$\text{قاعده ضرب} = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

مثال : فرض کنید شخصی می‌تواند تعطیلات نوروزی خود را با اتوبوس یا قطار یا هواپیما به یکی از ۴ شهر اصفهان، تبریز، شیراز یا مشهد برود. می‌خواهیم بدانیم این شخص به چند طریق ممکن این مسافرت را انجام می‌دهد.

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 3 \\ n_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow n_1 \times n_2 = 3 \times 4 = 12$$

برای نشان دادن تمام حالات ممکن از نمودار درختی استفاده می‌شود.



مثال : اگر قرار باشد پلاک اتومبیل ها را با استفاده از نام یک شهر، یک حرف فارسی و ۵ رقم مشخص کنیم به‌طوری که فقط استفاده از نام ۲۵ شهر مجاز باشد، چند پلاک مختلف را می‌توانیم شماره‌گذاری کنیم

۲۵ شهر → شهر

۳۲ حرف → حروف فارسی

هر رقم بین ۰ تا ۹ → ۵ رقم

تعداد پلاک‌های شماره‌گذاری شده :

$$25 \times 32 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= 72000000$$

STAEDTLER®

STAEDTLER

۳. جایگشت یا ترتیب :

ترتیب مختلف قرارگرفتن تمام یا قسمتی از یک سری از اشیاء در کنار یکدیگر را با توجه به نظم آن ها جایگشت می گویند. در ترتیب تقدم و تأخر قرارگرفتن اشیاء مهم بوده و مورد نظر است.

مثال : برای سه حرف a, b, c (هر جایگشت بدون تکرار حروف) می توان نوشت :

abc, acb, bca, bac, cab, cba

بنابراین ۶ جایگشت وجود دارد ⇐

□ □ □

3 x 2 x 1 = 6 یا 3!

بنابراین می توان گفت اگر n عضو متمایز را بخواهیم در یک صف کنار یکدیگر قرار دهیم تعداد جایگشت های این عناصر عبارت است از :

$n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1 = n!$

مثال : می خواهیم بدانیم به چند طریق می توان 5 کارمند نمونه را در حضور تمام اعضای شرکت معرفی کرد

□ □ □ □ □ = 5x4x3x2x1 = 120

حالت1 حالت2 حالت3 حالت4 یحالت

$5! = 120$

مثال : با ارقام 0 و 1 و 2 و 3 چند عدد ۲ رقمی می توان نوشت بطوریکه

الف) تکرار ارقام مجاز باشد : ⇐

□ □ = 12 (3 × 4)

ب) تکرار ارقام مجاز نباشد :

□ □ = 9 (3 × 3)

مثال : چهار پزشک و پنج مهندس می خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند :

الف) تعداد جایگشت های آنهایی مهندس ها در یک طرف و پزشک ها در طرف دیگر صف قرار گیرند چقدر است؟

ب) تعداد جایگشت های آنهایی پزشک ها و مهندس ها که در حال در صف قرار گیرند چقدر است ؟

ج) احتمال آنهایی که مهندس بخصوص در کنار هم قرار گیرند :

Scanned with CamScanner

STAEDTLER

۴ P→ پُر E خالی

الف) PPPP EEEEEE ⇒ $2! \times (4! \times 5!)$

ب) PEPEPEPEEE ع EPEPEPEPEP ⇒ $5! \times 4!$

ج) $8! \times 2!$

اگر از بین n عنصر متمایز نخواهیم، r عنصر را انتخاب کرده و در یک صف قرار دهیم (در کنار گذاشتن قرار دهیم) به تعداد ترتیب قرارگرفتن r شیء از n شیء خواهیم داشت، در این صورت:

الف) اگر تکرار عناصر مجاز نباشد، تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ ← ترتیب r از n

ب) اگر تکرار عناصر مجاز باشد، تعداد راه‌های ممکن برابر است با: n^r

مثال: چند عدد 4 رقمی می‌توان با استفاده از اعداد 1، 2، 3، 4، 5 و 6 ساخت، اگر هیچ یک از اعداد بیش از یک بار تکرار نشود.

روش اول: 6 5 4 3 = 360

روش دوم: $P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$

مثال: کلمه COMPUTER را در نظر بگیرید:

الف) تعداد کلمات 8 حرفی بدون تکرار که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با: $8!$

ب) تعداد کلمات 5 حرفی بدون تکرار که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با: $P_5^8 = \frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

ج) تعداد کلمات 5 حرفی با مجاز بودن تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت با: 8^5

Scanned with CamScanner

مثال: از کیسه‌ای شامل 8 مهره سفید و 4 مهره قرمز، 3 مهره یکی پس از دیگری و بدون جایگزینی از کیسه بیرون کشیده می‌شود:

الف) چند نمونه مرتب وجود دارد (به چند طریق این سه مهره می‌توانند انتخاب شوند)

ب) با این شرط که رنگ خارج شده در استخراج اول مهره‌ای قرمز و در استخراج سوم مهره سفید خارج شود اکنون چند نمونه مرتب وجود دارد

ج) نهایتاً در حوزه‌ای که نمونه‌گیری با جایگزینی باشد را مجدداً حل نمایید

الف) $P_3^{12} = \frac{12!}{9!} = 1320$ ⟹ [12] [11] [10] $= 1320$

ب) $P_2^4 \times P_1^8 = \frac{4!}{2!} \times \frac{8!}{7!} = 4 \times 3 \times 8 = 96$

[4] [3] [8] $= 96$

ج) { الف: [12] [12] [12] $= 1728$

ب: [4] [4] [8] $= 128$

اگر n عنصر موجود داشته باشد و بخواهیم آن را به گروه‌های k عنصری تقسیم نماییم. طوری که n_1 تای آن در گروه اول، n_2 تای آن در گروه دوم و به همین ترتیب ... n_k تای آن در گروه kام قرار گیرد به نحوی که

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

در این صورت تعداد روش‌های انجام این عمل براساس رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

این قانون به قاعده افراز یا تقسیم معروف است

مثال: می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان 8 کارمند را در 2 اتاق 3 نفره و 1 اتاق 2 نفره جای داد:

$$\frac{8!}{3! \times 3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3! \times 2} = 560$$

Scanned with CamScanner

STAEDTLER

مثال : به چند روش می‌توان 7 شاخه گل را در سه گلدان جای داد طوری که در یکی نه گلدان ها 4 شاخه گل و در دیگری 2 شاخه گل

در سومی 1 شاخه گل قرار گیرد :

$$\frac{7!}{4! \times 2! \times 1!} = 105$$

۴- ترکیب :

در ترکیب ، تعداد راه‌های انتخاب r تایی از بین n شیء مهم ولی ترتیب قرارگرفتن (جایگشت حاصله) مهم نیست . بنابراین می‌توان گفت اگر در قرارگرفتن اعضای متمایز یک مجموع در یک رده یا انتخاب اعضاء از یک مجموع، ترتیب قرارگرفتن اعضاء در کنار همدیگر (ترتیب انتخاب اعضا) مهم نباشد در این صورت جایگشت حاصله را ترکیب می‌گوییم . ترکیب r تایی از بین n شیء برابر است با این رابطه

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

مثال : قرار است از بین 8 نفر 3 نفر انتخاب شوند طوری مختلف می‌توان این 3 نفر را انتخاب کرد را محاسبه نمایید

چون ترتیب انتخاب 3 نفر از بین 8 نفر مهم نیست

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{6 \times 5!} = 56$$

مثال : از بین 4 پزشک و 3 پرستار می‌خواهیم کمیته 4 نفری تشکیل دهیم

الف) تعداد راه‌های ممکن برای اینکه اعضاء کمیته شامل 2 پزشک و 2 پرستار باشد

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{2}$$

ب) تعداد راه‌های ممکن برای اینکه " " حداقل شامل 2 پرستار باشد

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{3}{3}$$

مثال : از جعبه‌ای که شامل 5 مهره آبی ، 3 مهره سفید و 4 مهره قرمز است ، 6 مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم :

الف) تعداد راه‌های ممکن برای اینکه 2 مهره آبی و 1 مهره سفید انتخاب شود

$$\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{3}$$

ب) تعداد راه‌های ممکن برای اینکه از هر رنگ به تعداد مساوی انتخاب شود

$$\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}$$

Scanned with CamScanner

مثال: از کیسه ای شامل 8 مهره سفید و 4 مهره قرمز، 3 مهره یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری بیرون کشیده می شوند

الف) احتمال برای آوردن مهره‌ی قرمز در دو استخراج اول و مهره سفید در استخراج سوم چقدر است؟

ب) احتمال برای آوردن 2 مهره قرمز و 1 مهره سفید را محاسبه نمایید؟

تعریف احتمال وقوع یک پیشامد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

الف) $\frac{P_2^4 \times P_1^8}{P_3^{12}} = \frac{\frac{4!}{2!} \times \frac{8!}{7!}}{\frac{12!}{9!}} = \frac{96}{1320}$

ب) $\frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{4!}{2!\times 2!} \times \frac{8!}{1!\times 7!}}{\frac{12!}{3!\times 9!}} = \frac{48}{220}$

مثال: 4 کتاب متشکل از 2 کتاب ریاضی، 1 کتاب شیمی و 1 کتاب فیزیک را به چند روش می توان در کنار هم قرار داد

$$\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 12$$

$$\frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} = 12$$

Scanned with CamScanner